ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Ներածություն

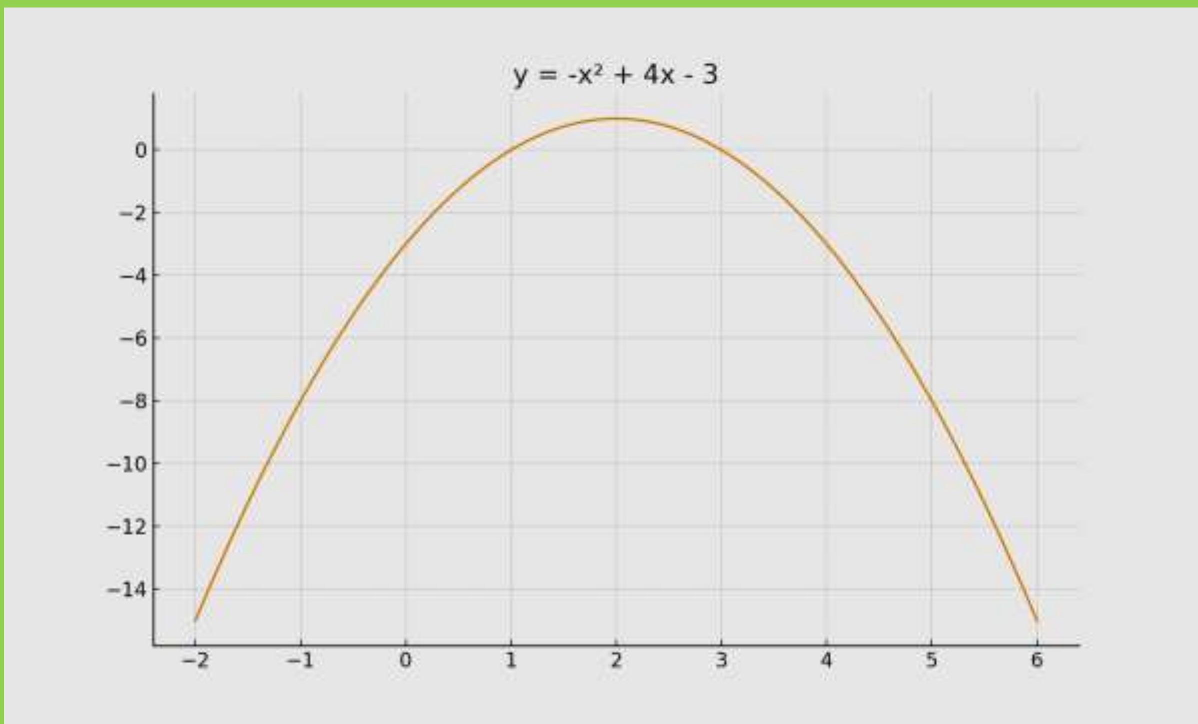
Քառակուսային ֆունկցիան մաթեմատիկայի ամենակարևոր և կիրառելի ֆունկցիաներից է, որը տարբեր գիտակարգերում օգտագործվում է մոդելավորումների, հաշվարկների և վերլուծությունների համար: Այն տալիս է պարաբոլ կոչվող գրաֆիկ, որը ունի միանշանակ բնութագրական տեսք:

Քառակուսային ֆունկցիան տրվում է հետևյալ ընդհանուր տեսքով.

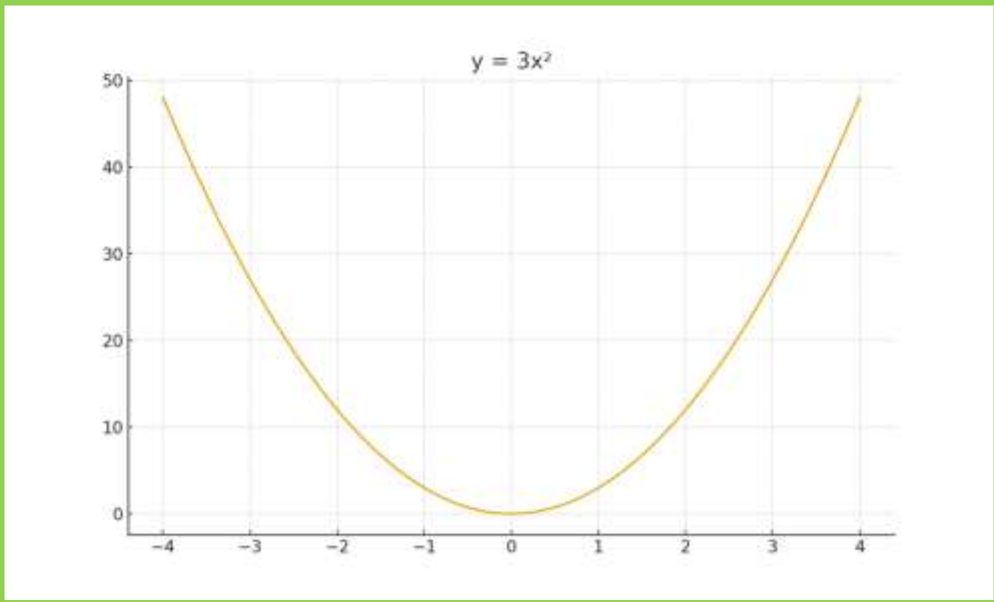
y=ax2+bx+c,a≠0y = ax^2 + bx + c,\quad a \neq 0y=ax2+bx+c,ax^2=0

Այստեղ

- **a, b, c** իրական թվեր են,
- **a ≠ 0** է, որովհետև հակառակ դեպքում ստացվում է գծային ֆունկցիա:



2. Քառակուսային ֆունկցիայի հիմնական բնութագրերը



2.1. Վերնաձյուղ կամ նվազագույն/առավելագույն կետ

Քառակուսային ֆունկցիան ունի ամուր մի կետ, որը կոչվում է **վերնաձյուղ** (vertex) կամ **ծայրահեղ կետ**:

Այն գտնվում է հետևյալ բանաձևով.

xv=−b2ax_v = \frac{-b}{2a}xv=2a−b

Այդ արժեքը տեղադրելով ֆունկցիայի մեջ՝ ստանում ենք y-ն:

Եթե

- **a > 0**, ապա այս կետը նվազագույնն է,
- **a < 0**, ապա այս կետը առավելագույն է:

2.2. Սիմետրիայի առանցք

Պարաբոլը սիմետրիկ է ուղղաձիգ գծի նկատմամբ.

x=−b2ax = \frac{-b}{2a}x=2a−b

2.3. Արմատներ (քառակուսային հավասարում)

Ֆունկցիան զրո է դառնում այն կետերում, որտեղ՝

ax2+bx+c=0ax^2 + bx + c = 0ax2+bx+c=0

Արմատների քանակը որոշվում է դիսկրիմինանտով.

D=b2−4acD = b^2 - 4acD=b2−4ac

- Եթե **D > 0** → 2 իրական արմատ
- Եթե **D = 0** → 1 կրկնակի արմատ
- Եթե **D < 0** → իրական արմատներ չկան (այն պարաբոլը չի հատում x- առանցքը)

4. Քառակուսային ֆունկցիայի կիրառությունները

Քառակուսային ֆունկցիաները լայն տարածում ունեն.

- Ֆիզիկա՝ մարմնի նետման գրաֆիկ, ազատ անկում
- Տնտեսագիտություն՝ շահույթի կամ ծախսի մոդելներ
- Ճարտարագիտություն՝ օպտիմալացում, նախագծում
- Տեխնիկա՝ պարաբոլային անդրադարձիչներ
- Ինֆորմատիկա՝ ալգորիթմների գնահատում ($O(n^2)$)

Քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը
y=ax2+bx+c, **որտեղ** a-**ն,** b-**ն,** c-**ն իրական թվեր են և** a≠0 **կոչվում է** **քառակուսային ֆունկցիա**:

Գրաֆիկի մոտավոր (ASCII) պատկերումը՝

```
        |
      . | .
     .  |  .
    .   |   .
----    |    ----
   .    |    .
    .   |   .
     .  |  .
        |
```

Եթե a < 0 → պարաբոլը բացված է ներքև

Օրինակ՝

y=−x2y = -x^2y=−x2

Գրաֆիկի պարզագույն պատկերումը՝

```
      . . . . . .
     .           .
   .               .
----------------------
        .       .
          .   .
            .
```

Քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը պարաբոլ է:

Քառակուսային ֆունկցիայի D(f) որոշման տիրույթը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է:

Քառակուսային ֆունկցիայի E(f) արժեքների բազմությունը կախված է պարաբոլի գագաթի y կոորդինատից և պարաբոլի ճյուղերի ուղղվածությունից:

a գործակիցը որոշում է պարաբոլի ճյուղերի ուղղվածությունը:

Եթե a>0, ապա ճյուղերը ուղղված են դեպի վերև:
Եթե a<0, ապա ճյուղերը ուղղված են դեպի ներքև:

c գործակիցը ցույց է տալիս, թե որ կետում է պարաբոլը հատում Oy առանցքը:

Քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է՝

1) հաշվել պարաբոլի գագաթի կոորդինատները: Աբսցիսը գտնում ենք x0=−b2a բանաձևով, իսկ y0 օրդինատը գտնում ենք՝ տեղադրելով x0 աբսցիսը ֆունկցիայի բանաձևի մեջ,

2) կոորդինատային հարթության վրա նշել գտնված գագաթը և տանել պարաբոլի համաչափության առանցքը,

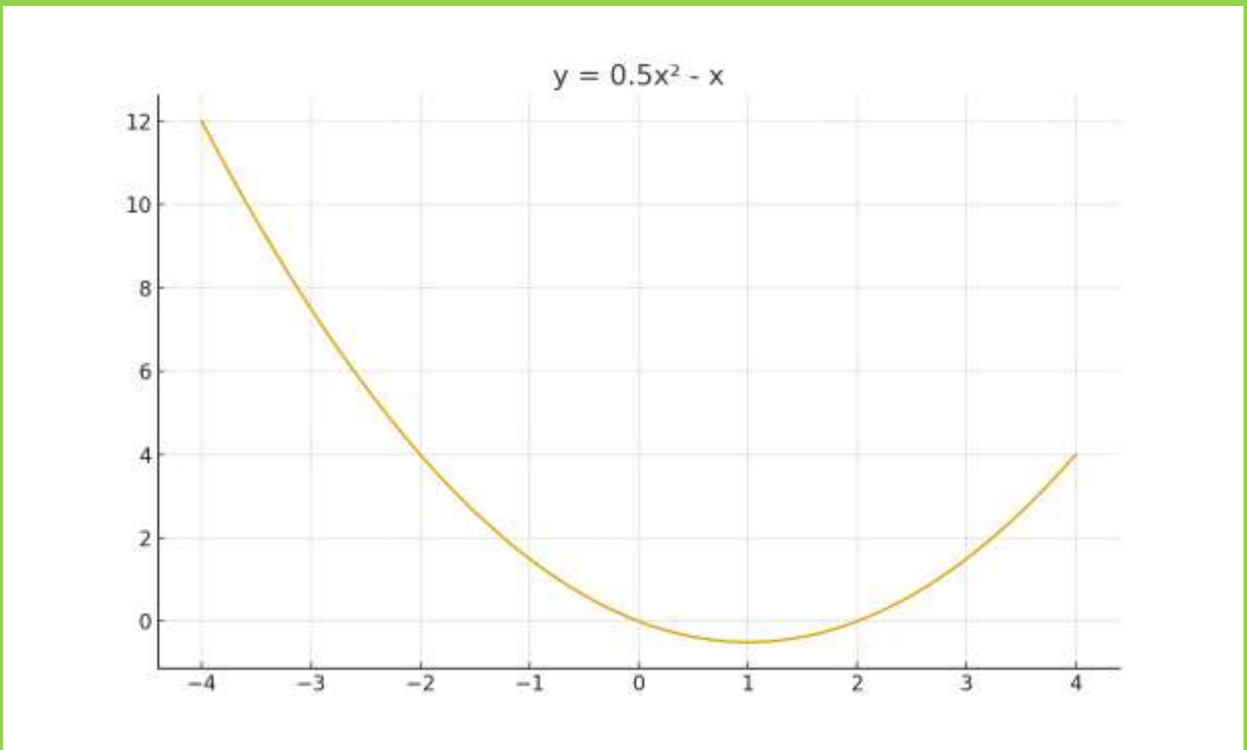
3) որոշել պարաբոլի ճյուղերի ուղղվածությունը,

4) նշել պարաբոլի և Oy առանցքի հատման կետը,

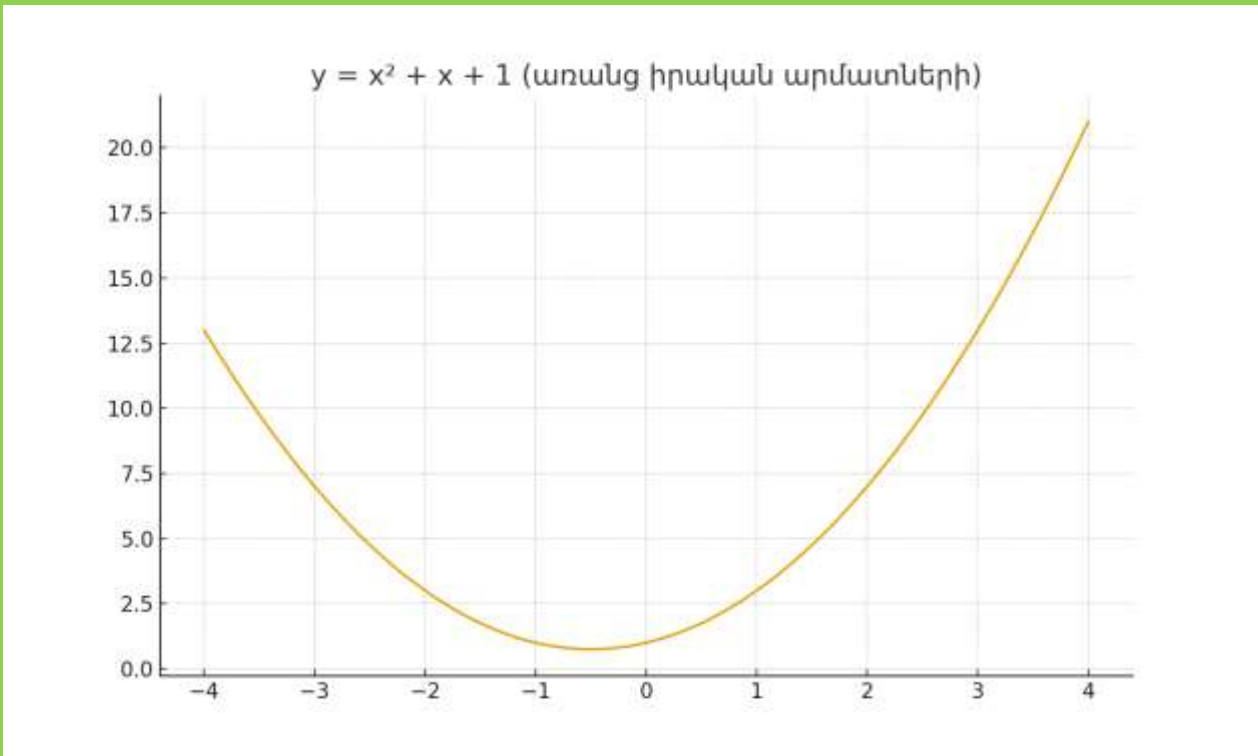
5) ընտրելով x աբսցիսի անհրաժեշտ արժեքները, կազմել ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը:

Լուծելով ax2+bx+c=0 քառակուսային հավասարումը, գտնում ենք պարաբոլի հատման կետերը Ox առանցքի հետ:

Եթե D>0), ապա կա երկու հատման կետ:
Եթե D<0, ապա պարաբոլը չի հատում Ox առանցքը:
Եթե D=0, ապա պարաբոլի գագաթը գտնվում է Ox առանցքի վրա:



Պարաբոլա առանց իրական արմատների՝ $y = x^2 + x + 1$



Քառակուսային ֆունկցիայի գործնական դրսևորումներ

- Ազատ անկում կատարող մարմնի բարձրության կախումը ժամանակից.

- Շրջանի չափերի կախումը իր գծային չափերից օրինակ՝ շառավղից։
- Հավասարաչափ փոփոխական շարժման տեղափոխության կախումը ժամանակից։

1. Մարմնի նետման շարժում (ֆիզիկա)

Երբ առարկան նետվում է վերև կամ թեքությամբ, նրա շարժման ճանապարհը **պարաբոլա** է։

Օրինակ

Օդում վազող գնդակի բարձրությունը տրվում է.

h(t)=−5t2+20t+1h(t) = -5t^2 + 20t + 1h(t)=−5t2+20t+1

- «−5»-ը պատասխանատու է ձգողականության համար
- «20t» – սկզբնական արագություն
- «1» – սկզբնական բարձրություն

☞ Այս գրաֆիկը միշտ պարաբոլա է։

Գործնական նշանակություն՝

- սպորտում (ֆուտբոլ, գնդաձև ցատկում, բասկետբոլ)
- ռազմական տեխնիկայում (հրետանային ուղիներ)
- ֆիզիկայում՝ շարժումների մոդելավորման համար

---

2. Տնտեսագիտություն – շահույթի կամ ծախսի օպտիմալացում

Շատ տնտեսագիտական գործառույթներ քառակուսային են. Օրինակ, արտադրության ծախսը՝

C(x)=ax2+bx+cC(x) = ax^2 + bx + cC(x)=ax2+bx+c

կամ շահույթը՝

P(x)=−x2+20x−50P(x) = -x^2 + 20x - 50P(x)=−x2+20x−50

Այս ֆունկցիան ունի առավելագույն/նվազագույն կետ՝ ըստ պարաբոլի վերնաձյուղի։

☞ Կիրառություն՝

- լաբորատորիաներում լավագույն արտադրության ծավալը գտնել
- նվազագույն ծախսով աշխատել
- առավելագույն շահույթ ստանալ

---

3. Ճարտարագիտություն – կամուրջներ, թմբեր, ծածկեր

Շատ ինժեներական կառույցներ ունեն **պարաբոլային ձև**, որովհետև այդ ձևը բարձր ամրություն է ապահովում:

Օրինակներ

- կամուրջների կամարներ (Golden Gate Bridge- ի մալուխները մոտավորապես պարաբոլային են)
- արխիտեկտուրական կամարներ
- ավտոմայրուղու բարձրացում-իջեցումներ

Պարաբոլան ապահովում է ուժերի հավասար բաշխում, ինչը նվազեցնում է փլուզման ռիսկը:

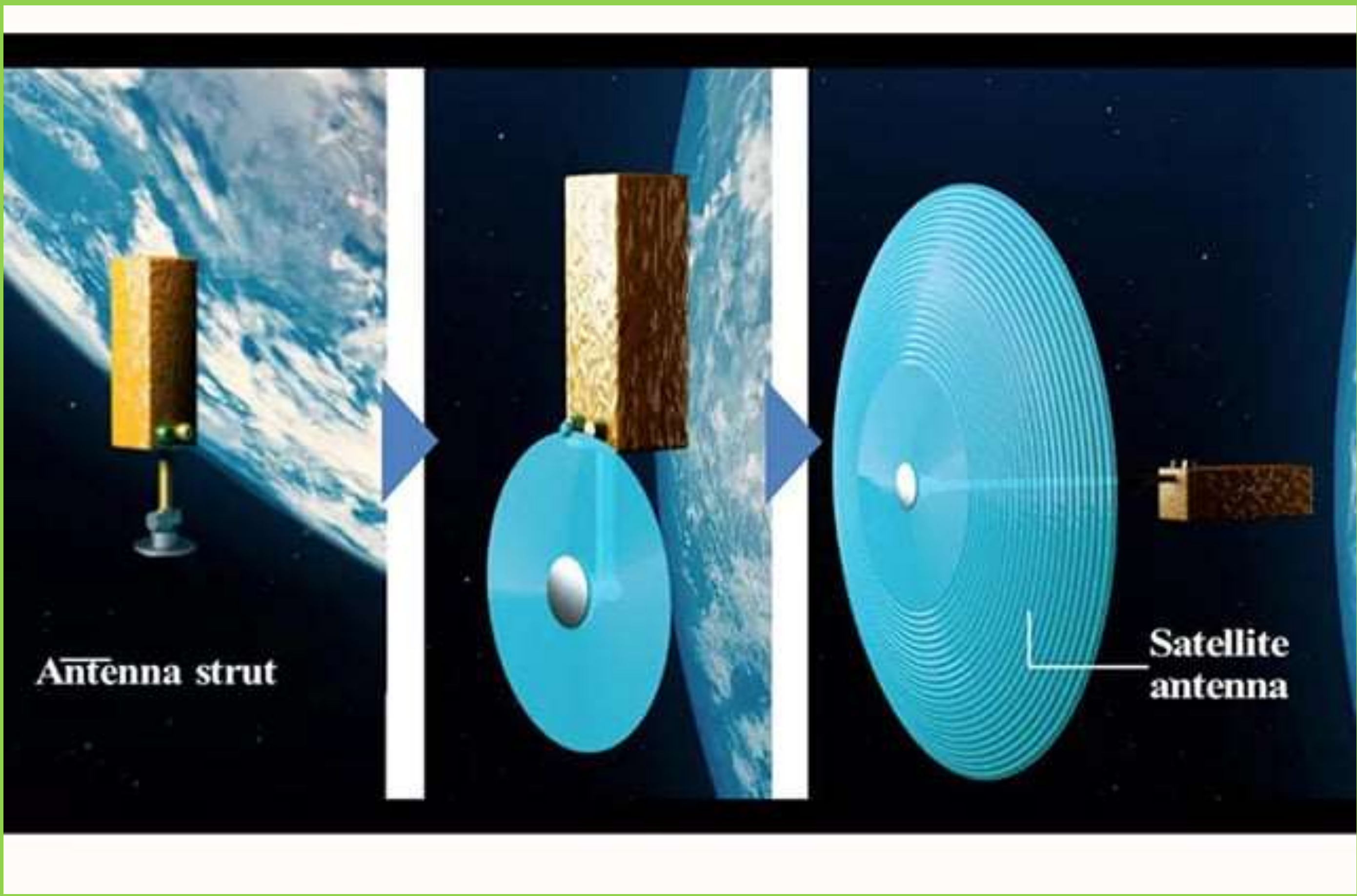
4. Արտացոլում և focusing (օպտիկա)

Պարաբոլայական հայելիները ունակ են լույսը կամ ձայնը կենտրոնացնել մեկ կետի վրա։

Օրինակներ՝

- արբանյակային ափսեներ

- միկրոֆոնների ուղղորդիչ կոններ
- լազերային համակարգեր
- մեքենայի լապտերների արտացոլիչներ
- արևային կոլեկտորներ



☞ Քառակուսային ֆունկցիայի պարաբոլային ձևը ապահովում է ճշգրիտ կենտրոնացում:

---

5. Տրանսպորտային երթուղիների մոդելավորում

Երբ մեքենան արագանում կամ դանդաղում է, արագության փոփոխությունը ժամանակից կախված կարող է մոտենալ քառակուսային ֆունկցիայի:

Օրինակ՝

Մեքենայի անցած ճանապարհը՝

s(t)=at2+bts(t) = at^2 + bts(t)=at2+bt

Եթե մեքենան սկսում է արագանալ՝ արագացումը աճում է, արդյունքում գրաֆիկը դառնում է պարաբոլիկ:

6. Շինարարություն – նյութի նվազագույն ծախս

Շատ շինարարական նախագծերում փորձ է արվում գտնել այն չափերը, որոնց դեպքում խողովակի, տանիքի կամ այլ մասերի համար նյութի ծախսը **նվազագույն** է:

Այն արտահայտվում է քառակուսային ֆունկցիաներով:

Օրինակ՝

N(w)=w2−10w+40N(w) = w^2 - 10w + 40N(w)=w2−10w+40

Այստեղ N(w)-ը նյութի ծախսն է, և վերնաճյուղը տալիս է **նվազագույն ծախսը**:

7. Կոմպյուտերային գիտություն – ալգորիթմների բարդություն

Շատ կարևոր ալգորիթմների աշխատանքը մոտավորապես քառակուսային է.

Օրինակ՝

- բաբլ-սորս (Bubble Sort)
- ինսերթ-սորս (Insertion Sort)

Դրանց բարդությունը՝

O(n2)O(n^2)O(n2)

☞ Իրական ծրագրավորողները մշտապես աշխատում են նվազեցնել այս քառակուսային աճը։

8. Բնություն – ճենճերի, ձկների, թռչունների թռիչքի ուղի

Օդում թռչող կամ նետվող բազմաթիվ կենդանիների (օր. – թռչունների սլանալիս, ձկների ցատկելիս) շարժման ճանապարհը մոտավորապես պարաբոլ է։

---

9. Աղբյուրների կամ ջրվեժների ջրի գիծ

Ջուրը, երբ դուրս է գալիս ճնշման տակ, նույնպես պարաբոլիկ ուղի ունի, քանի որ այն obeys free-fall physics.

Ֆուտբոլի գնդակի թռիչքը

Երբ ֆուտբոլիստը հարվածում է գնդակին, նրա թռիչքի ուղին **պարաբոլա** է։

Այն կարելի է մոտավորապես նկարագրել՝

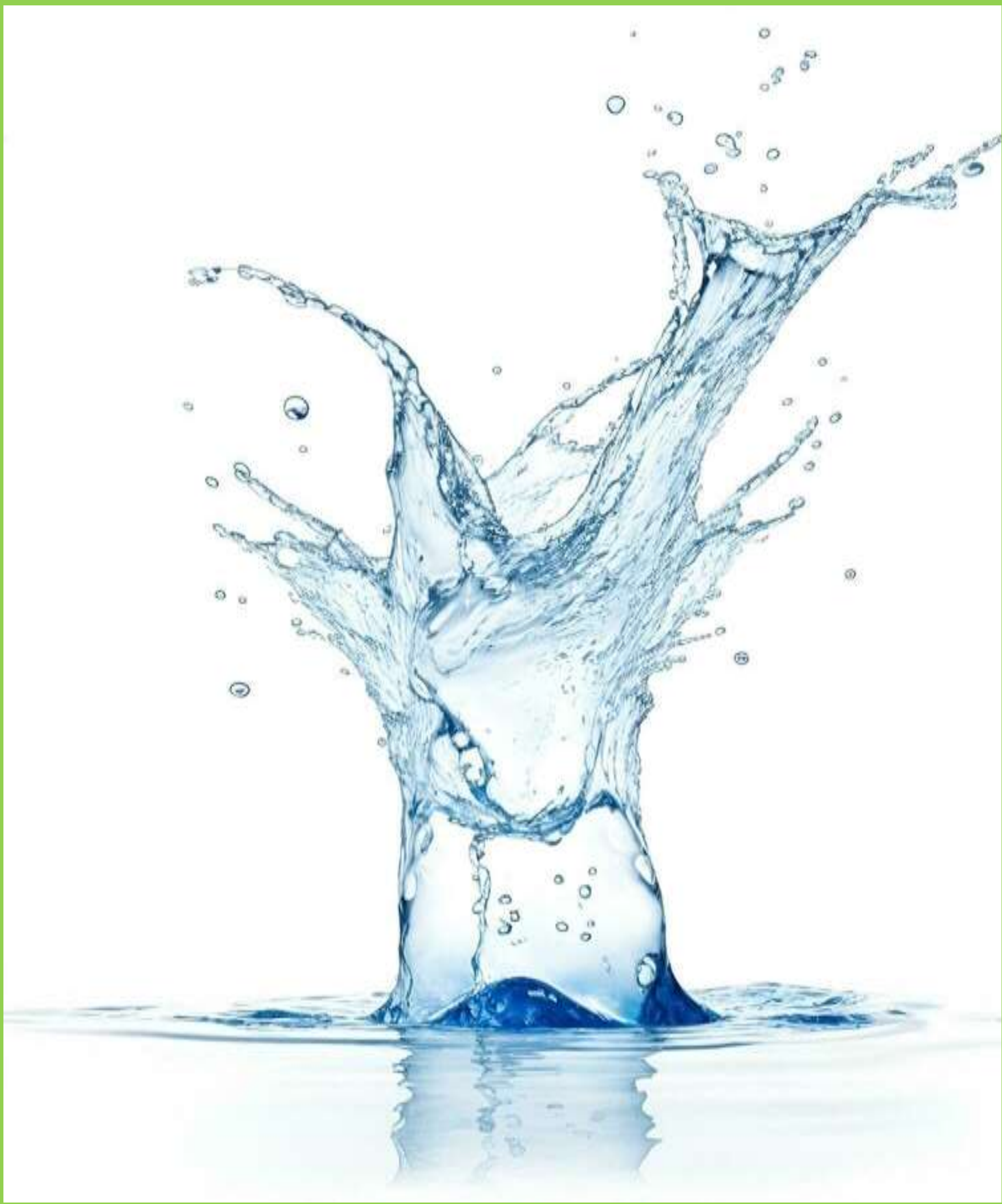
h(t)=−5t2+18t+0.7h(t) = -5t^2 + 18t + 0.7h(t)=−5t2+18t+0.7

---

2. Ջրի շիթը ֆոնտանից

Ֆոնտանի ջուրը նույնպես պարաբոլա է, քանի որ ազատ անկումը գործում է նրա վրա։

Ջրի շիթի բարձրությունն ու հեռավորությունը մոդելավորվում են քառակուսային ֆունկցիայով։



3. Արբանյակային ափսե

Արբանյակային ափսեի ձևը **պարաբոլա** է, որպեսզի բոլոր ազդանշանները կենտրոնանան մի կետի վրա՝ *ֆոկուսում*։

---

4. Մեքենայի լուսարձակ

Լույսի հետադարձիչը պարաբոլիկ է կառուցվում, որպեսզի լույսը ուղիղ ճառագայթ դարձնի։

Այն օգտագործում է՝

y=ax2y = ax^2y=ax2

ձևով պարաբոլիկ հայելի։

5. Ջրվեժի ջրի անկումը

Ջրի կաթիլների ուղին ազատ անկմամբ **պարաբոլա** է, հատկապես ուժեղ քամու բացակայության դեպքում:

6. Կամարային կամուրջներ

Շատ կամուրջներ (օր.՝ Սավթվերկի կամուրջը, Արևմտյան Մայրուղու կամարները) կառուցվում են **պարաբոլիկ ձևով**, որովհետև դա ապահովում է առավելագույն ամրություն:

---

7. Ծիածանի որոշ մոդելներ

Թեպետ ծիածանը լրիվ պարաբոլա չէ, ջրի կաթիլների անդրադարձման որոշ մոդելներ մոտեցվում են պարաբոլիկ կորը՝ հաշվարկների համար:

---

8. Թռչունների թռիչքի որոշ պահեր

Տարածված է թռչունների ցածից վեր թափ տալու ժամանակ շարժումը մոտենում է քառակուսային ուղու:

---

9. Անկում կատարող առարկաներ

Եթե ինչ–որ մեկը նետում է բանալիները, նրանց ուղին միշտ պարաբոլիկ է։

---

10. Նետաձգության սլաք

Սլաքի ճանապարհը՝

y(t)=−gt2+vt+hy(t)= -gt^2 + vt + hy(t)=−gt2+vt+h

դարձյալ պարաբոլա է, որտեղ g-ն ձգողականությունն է։

---

11. Ավտոմեքենայի արգելակման ճանապարհ

Արգելակման երկարությունը սովորաբար քառակուսային կախվածություն ունի արագությունից՝

d=kv2d = kv^2d=kv2

Եթե արագությունը կրկնապատկվում է, կանգառի ճանապարհը *չորս անգամ* երկարանում է։

---

12. Տնտեսագիտություն – շահույթի մոդելներ

Շահույթը հաճախ պարաբոլիկ է՝

P(x)=−x2+40x−120P(x) = -x^2 + 40x - 120P(x)=−x2+40x−120

Կա մի կետ, որտեղ շահույթը **առավելագույն** է։ Սա կիրառվում է բիզնեսում՝ ճիշտ արտադրության ծավալ գտնելու համար։

14. Քամու թունելներում օդի հոսքի մոդելներ

Շատ օդազծային մոդելներ ունեն քառակուսային բնույթ՝

F=kv2F = k v^2F=kv2

(քաշող ուժը աճում է արագության քառակուսիով)

15. Դարպասի դարակի բացվելը

Երկաթյա կամ փայտյա դարպասի ծայրի կողմից շարժված ուղին շրջան է, բայց վերնագծային մոտեցմամբ՝ բարձրության փոփոխությունը հաճախ մոտենում է քառակուսային կախվածության։

---

13. Արևային կոլեկտորներ

Արևային ջեռուցիչների արտացոլիչները պարաբոլիկ են, որպեսզի կենտրոնացնեն արևի լույսը մեկ կետի վրա՝ ջեռուցումն ուժեղացնելու համար։

Եզրակացություն

Քառակուսային ֆունկցիան մաթեմատիկայի մի հիմնարար թեմա է, որն ունի ինչպես տեսական, այնպես էլ գործնական մեծ նշանակություն։

Այն հանդիսանում է բազմաթիվ բնական և տեխնիկական պրոցեսների մաթեմատիկական նկարագրության հիմքը։

Քառակուսային ֆունկցիայի ուսումնասիրությունը զարգացնում է վերլուծական մտածողությունը և ապահովում է մաթեմատիկական ավելի բարդ թեմաների ընկալումը։