

Ֆրակտալներ

Բազմություն, որն ունի ինքնանմանության հատկություն

Ինքնանմանություն և Կոտորակային չափականություն

Ինքնանմանություն

Ֆրակտալը օբյեկտ է, որը ճշգրիտ կամ մոտավորապես համապատասխանում է ինքն իր մի մասին: Ամբողջը ունի նույն ձևը, ինչ մեկ կամ մի քանի մասը: Այս հատկությունը մնում է խոշորացման ժամանակ՝ ստեղծելով անսահման բարդություն:

Կոտորակային չափս

Ի տարբերություն ամբողջ թվային չափումների, ֆրակտալներն ունեն ոչ ամբողջ չափսեր: Ֆրակտալ չափումը քանակականացնում է բարդ կառուցվածքների տարածությունը լցնելու կարողությունը՝ բացահայտելով ավանդական չափերի միջև կոտորակային արժեքներ:

Բոլոր մասշտաբներում բարդություն

Ֆրակտալի համար մասշտաբի բարձրացումը չի հանգեցնում կառուցվածքի պարզեցման, այսինքն՝ բոլոր մասշտաբների վրա կարելի է տեսնել հավասարապես բարդ պատկեր:

Տարբերվում է կանոնավոր պատկերներից

Դրանով այն տարբերվում է կանոնավոր պատկերներից (շրջան, էլիպս, հարթ ֆունկցիայի գրաֆիկ): Սովորական ձևի փոքր հատվածը մեծ մասշտաբով դիտելիս կարծես ուղիղ գծի հատված է դառնում:



Պատմություն և հիմնադիրներ

Ֆրակտալների պատմությունը սկսվել է 19-րդ դարի վերջին և 20-րդ դարի սկզբին, երբ մաթեմատիկոսները ուսումնասիրում էին բարդ երկրաչափական ձևեր և նախշեր: Այնուամենայնիվ, միայն 20-րդ դարի կեսերին սկսեց ձևավորվել ֆրակտալների գաղափարը:

19-րդ դար

Առաջին օրինակներ հայտնվեցին՝ չդիֆերենցիալ անընդհատ ֆունկցիաների ուսումնասիրության արդյունքում (Բուլցանո, Վեյերշտրաս, Կանտոր):

1

1977 թվական

Մանդելբրոտի «Բնության ֆրակտալ երկրաչափություն» գրքի հրատարակումով տերմինը լայն տարածում գտավ:

2

3

4

1975 թվական

Բենուա Մանդելբրոտը ներմուծեց «ֆրակտալ» տերմինը: 20-րդ դարի կեսերին սկսեց ձևավորվել ֆրակտալների գաղափարը:

1982 թվական

Մանդելբրոտը հրատարակեց իր «Բնության ֆրակտալ երկրաչափությունը» գիրքը, որը ֆրակտալները ներկայացրեց մաթեմատիկայի ոլորտից դուրս ավելի լայն լսարանի:

Հատկապես Մանդելբրոտին վերագրվում է ֆրակտալների հայեցակարգի հանրահռչակումը 1970-ական և 1980-ականների իր բեկումնային աշխատանքի շնորհիվ: Մաթեմատիկոսներ, ինչպիսիք են Գաստոն Զուլիան, նույնպես զգալի ներդրում ունեցան ոլորտում՝ մշակելով մաթեմատիկական տեսություններ և հավասարումներ ֆրակտալ երկրաչափությունը նկարագրելու համար:

Համակարգիչների հայտնվելը 20-րդ դարի վերջին կեսին վճռորոշ դեր խաղաց ֆրակտալների զարգացման գործում: Համակարգիչները մաթեմատիկոսներին և գիտնականներին թույլ էին տալիս պատկերացնել, գեներացնել և ուսումնասիրել բարդ ֆրակտալ կառուցվածքները այնպես, որ նախկինում հնարավոր չէր:

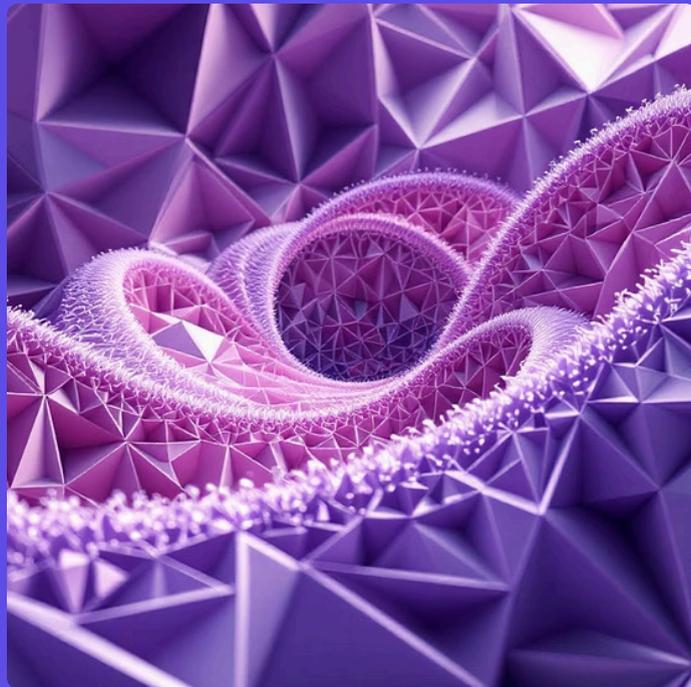
Հիմնական ֆրակտալ կառույցներ

Արտասովոր հատկություններով ինքնանման բազմություններ մաթեմատիկայում 19-րդ դարի վերջից սկսած՝ մաթեմատիկայում հայտնվեցին դասական վերլուծության տեսանկյունից պաթոլոգիական հատկություններ ունեցող ինքնանման առարկաների օրինակներ:



Կանտորի հավաքածու

Ոչ մի տեղ խիտ կենտ կատարյալ բազմություն է: Ընթացակարգը փոփոխելով՝ կարելի է ստանալ նաև ոչ մի տեղ խիտ դրական երկարության բազմություն:



Սերպինսկու եռանկյուն

Կանտորի բազմության անալոգն է հարթության վրա, որը ստացվում է կրկնվող ընթացակարգով՝ յուրաքանչյուր եռանկյունից հեռացնելով կենտրոնական մասը:



Կոխի կոր

Անսահման երկարության ոչ ինքնահատվող շարունակական կոր, որը չունի շոշափող ոչ մի կետում: Օգտագործվել է ափագծի երկարությունը հաշվարկելու համար:

Մենգերի սպունգ

Կանտորի բազմության անալոգը եռաչափ տարածության մեջ: Բազմաչափ կառույց, որը ստացվում է խորանարդից կրկնվող ընթացակարգով մասեր հեռացնելով:

Վեյերշտրասի ֆունկցիա

Ոչ մի տեղ չդիֆերենցվող անընդհատ ֆունկցիաների օրինակ: Պատմականորեն կարևոր ֆրակտալ, որը ցույց է տալիս անընդհատ և դիֆերենցելի ֆունկցիաների տարբերությունը:

Պեանոյի կոր

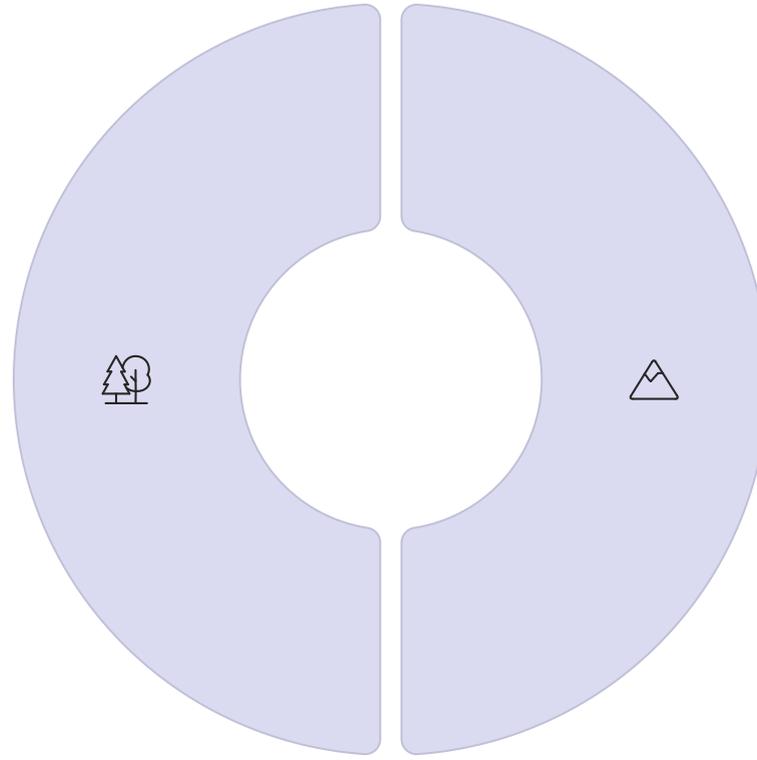
Շարունակական կոր, որն անցնում է խորանարդի բոլոր կետերով: Տարօրինակ հատկություններով կոր, որը լիովին լցնում է տարածությունը:

Բնության ֆրակտալներ

Բնության շատ օբյեկտներ ունեն ֆրակտալ հատկություններ, բայց բնական օբյեկտները (քվադրիֆրակտալները) իդեալական վերացական ֆրակտալներից տարբերվում են ոչ լիարժեքությամբ և կառուցվածքի կրկնության անճշտությամբ: Բնության մեջ հանդիպող ֆրակտալանման կառույցների մեծ մասը քվադրիֆրակտալներ են, քանի որ որոշ փոքր մասշտաբում ֆրակտալ կառուցվածքը անհետանում է:

Կենդանի բնություն

- Կորալներ, ծովային աստղեր
- Ծառերի սաղարթներ
- Արյան շրջանառության համակարգ
- Բրոնխների համակարգ
- Բույսերի տերևներ



Անկենդան բնություն

- Ափամերձ գիծ, լեռնաշղթաներ
- Ձյան փաթիլներ, ամպեր
- Կայծակ, երկրաշարժներ
- Բյուրեղներ, ստալակտիտներ
- Օվկիանոսի ալիքներ



Բնական կառույցները չեն կարող լինել իդեալական ֆրակտալներ կենդանի բջիջների չափսերի սահմանափակումների և մոլեկուլների չափերի պատճառով: Սակայն դրանց ֆրակտալ բնույթը հասկանալը կարող է պատկերացում կազմել այդ երևույթները կառավարող հիմքում ընկած գործընթացների մասին:

Ստոխաստիկ ֆրակտալներ

Բնական օբյեկտները հաճախ ունենում են ֆրակտալ ձև: Դրանց մոդելավորման համար կարող են օգտագործվել ստոխաստիկ (պատահական) ֆրակտալները: Ստոխաստիկ ֆրակտալները տարբերվում են դետերմինիստական ֆրակտալներից նրանով, որ դրանց կառուցումը պատահական գործընթացների միջոցով է:



Պատահական պարամետր

Ռեկուրսիվ ընթացակարգի միջոցով ստացված ֆրակտալներ, որտեղ ամեն քայլափոխի մտցվում է պատահական պարամետր:



Բրոունյան շարժում

Բրոունյան շարժման հետագիծը հարթության վրա և տարածության մեջ: Հարթության վրա Բրոունյան շարժման հետագծի սահմանը:



Շրամ-Լյովների էվոլյուցիաներ

Կոնֆորմ արտապատկերվող ֆրակտալ կորեր, որոնք ծագում են Վիճակագրական մեխանիկայի կրիտիկական երկչափական մոդելներում, օրինակ՝ Իզինգի մոդելում և պերկոլյացիայում:

Լոուլեր-Շրամ-Վերների արդյունք

2001 թվականին Լոուլերը, Շրամը և Վերները ապացուցեցին Մանդելբրոտի ենթադրությունն այն մասին, որ դրա չափականությունը 4/3 է: Սա կարևոր արդյունք է ստոխաստիկ ֆրակտալների տեսության մեջ:

Համակարգչային գրաֆիկա

Պլազման նման ֆրակտալի օգտագործումը համակարգչային գրաֆիկայում ստեղծում է բնական տեսքով տեքստուրներ և երևույթներ:

Ֆրակտալներ արվեստում և արդյունաբերության մեջ



Փոլոքի նկարներ

1999 թվականից ավելի քան 10 գիտական խմբեր իրականացրել են ֆրակտալ վերլուծություն Ջեքսոն Փոլոքի (1912-1956) ավելի քան 50 գեղանկարների վերաբերյալ, որոնք ստեղծվել են ներկն ուղղակիորեն հորիզոնական կտավների վրա լցնելով: Կոգնիտիվ նեյրոկենսաբանները ցույց են տվել, որ Փոլոքի ֆրակտալները նույնքան են նվազեցնում սթրեսը դիտորդների մոտ, որքան համակարգչի կողմից ստեղծված ֆրակտալներն ու բնության ֆրակտալները:



Ռադիոտեխնիկա

Ֆրակտալ երկրաչափության օգտագործումը ալեհավաքների նախագծման ժամանակ առաջին անգամ կիրառվել է ամերիկացի ինժեներ Նաթան Քոենի կողմից, որն այն ժամանակ ապրում էր Բոստոնի կենտրոնում, որտեղ արգելված էր արտաքին ալեհավաքների տեղադրումը շենքի վրա: Նաթանն այլումիտ փայլաթիթեղից կտրել է Կոխի կորի տեսքով կազմվածքը և այն փակցրել թղթի վրա, այնուհետև միացրել ռադիոընդունիչին: Քոենը հիմնել է իր սեփական ընկերությունը և սկսել իր ալեհավաքների սերիական թողարկումը: Այդ ժամանակներից ի վեր ֆրակտալ ալեհավաքները տեսությունը շարունակում է ինտենսիվորեն զարգանալ: Նման ալեհավաքների առավելությունն այն է, որ դրանք բազմաբնույթ են և համեմատաբար լայնաշերտ:



Պատկերի սեղմում

Գոյություն ունեն ֆրակտալների միջոցով պատկերի սեղմման ալգորիթմներ: Դրանք հիմնված են այն գաղափարի վրա, որ պատկերի փոխարեն կարելի է պահպանել սեղմող արտացոլումը, որի համար այդ պատկերը անշարժ կետ է: Այս ալգորիթմի տարբերակներից մեկն օգտագործվել է Microsoft ընկերության կողմից իր հանրագիտարանը հրատարակելիս, սակայն այդ ալգորիթմները մեծ տարածում չեն ստացել:



Ապակենտրոնացված ցանցեր

Netsukuku ցանցում IP հասցեների նշանակման համակարգն օգտագործում է տեղեկատվության ֆրակտալ սեղմման սկզբունքը ցանցի հանգույցների մասին տեղեկատվության կոմպակտ պահպանման համար: Netsukuku ցանցի յուրաքանչյուր հանգույց պահպանում է միայն 4 ԿԲ տեղեկատվություն հարևան հանգույցների կարգավիճակի մասին, միևնույն ժամանակ, ցանկացած նոր հանգույց միանում է ընդհանուր ցանցին առանց IP-հասցեների բաշխման կենտրոնական կարգավորման անհրաժեշտության, ինչը բնորոշ է ինտերնետին:

Ֆրակտալները լայնորեն կիրառվում են համակարգչային գրաֆիկայում բնական օբյեկտների պատկերներ կառուցելու համար, ինչպիսիք են ծառերը, թփերը, լեռնային լանդշափները, ծովերի մակերևույթները և այլն: Կան բազմաթիվ ծրագրեր, որոնք ծառայում են ֆրակտալ պատկերների գեներացման համար:

Քառսի տեսություն և կիրառություններ

Ֆրակտալները հատուկ նշանակություն ունեն քառսի տեսության ոլորտում, քանի որ քառսային գործընթացների մեծամասնության գրաֆիկները ֆրակտալներ են: Ֆրակտալները սերտորեն կապված են քառսի տեսության հետ՝ ցույց տալով դետերմինիստական քառսը և նախնական պայմանների նկատմամբ զգայունությունը:

Ռեկուրսիվ ընթացակարգ

Ֆրակտալ կորեր ստանալու ռեկուրսիվ ընթացակարգ: Որոշենք վերջավոր թվով հանգույցներով կամայական բեկյալ՝ գեներատոր: Այնուհետև դրա մեջ յուրաքանչյուր հատվածը փոխարինենք գեներատորով (գեներատորի նման բեկյալով):



Անսահմանություն

Շարունակելով մինչև անսահմանություն՝ ստանում ենք ֆրակտալ կոր: Այս գաղափարի կիրառմամբ ստացվում է Պյութագորասի ծառը և այլ բարդ կառույցներ:

Անշարժ կետ

Ինքնանմանության հատկությունը կարող է մաթեմատիկորեն խստորեն արտահայտվել հարթության սեղմիչ արտացոլումների անշարժ կետի տեսքով Բանախի թեորեմի համաձայն:

4/3

Մանդելբրոտի չափ

2001 թվականին ապացուցվեց Մանդելբրոտի ենթադրությունը

10+

Գիտական խմբեր

Փոլոքի նկարների վերլուծության համար

50+

Գեղանկարներ

Ֆրակտալ վերլուծության ենթարկվեցին

Ֆիզիկայում

Ֆրակտալները բնականորեն ձևավորվում են ոչ գծային գործընթացների մոդելավորման ժամանակ, ինչպիսիք են հեղուկի մրրկային հոսքը, դիֆուզիոն-ադսորբման բարդ գործընթացները, կրակը, ամպերը և այլն: Ֆրակտալներն օգտագործվում են ծակոտկեն նյութերի մոդելավորման մեջ, օրինակ՝ նավթաքիմիական նյութերում:

Կենսաբանության մեջ

Կենսաբանության մեջ դրանք օգտագործվում են պոպուլյացիաների մոդելավորելու և ներքին օրգանների համակարգերը (արյունատար անոթների համակարգը) նկարագրելու համար: Կոխի կորի ստեղծումուց հետո առաջարկվել է այն օգտագործել ափագծի երկարությունը հաշվարկելու համար:

Ապագա և ամփոփում

Մաթեմատիկա

Համատեղում է գեղագիտական գեղեցկությունը խորը տեսական հետևանքների հետ

α



Արվեստ

Ներկայացնում է նոր ձևեր և մոտեցումներ ստեղծագործությանը

Բնական գիտություններ

Օգտագործվում է ֆիզիկայում, կենսաբանության մեջ և այլն



Համակարգչային գիտություն

Կիրառվում է գրաֆիկայում, սեղմման մեջ և ցանցերում

Ֆրակտալները ներկայացնում են մաթեմատիկայի գրավիչ և բազմակողմանի ոլորտ՝ համատեղելով գեղագիտական գեղեցկությունը խորը տեսական հետևանքների հետ: Նրանց կիրառությունները տարածվում են մաթեմատիկայի սահմաններից դուրս՝ դեպի տարբեր ոլորտներ, ինչպիսիք են արվեստը, համակարգչային գիտությունը և բնական գիտությունները:

Համակարգչային գրաֆիկա

Ֆրակտալները հավելվածներ են գտնում համակարգչային գրաֆիկայում՝ ստեղծելով տեսողականորեն ցնցող պատկերներ և սիմուլյացիաներ: Ֆրակտալների ռեկուրսիվ բնույթը թույլ է տալիս ստեղծել արդյունավետ ալգորիթմներ, որոնք ստեղծում են բարդ օրինաչափություններ համեմատաբար պարզ մաթեմատիկական կանոններով:

Քառուսի տեսություն

Ֆրակտալները սերտորեն կապված են քառուսի տեսության հետ՝ ցույց տալով դետերմինիստական քառուսը և նախնական պայմանների նկատմամբ զգայունությունը: Այս կապը ազդեցություն ունի ֆիզիկայից մինչև տնտեսագիտություն ոլորտներում:

Բնական երևույթներ

Ֆրակտալները նկատվում են տարբեր բնական երևույթներում, ինչպիսիք են ափամերձ գծերը, ամպերը և ձյան փաթիլները: Այս օրինաչափությունների ֆրակտալ բնույթը հասկանալը կարող է պատկերացում կազմել այդ երևույթները կառավարող հիմքում ընկած գործընթացների մասին:

«Բնության երկրաչափությունը ֆրակտալ է» - Բենուա Մանդելբրոտ

Ֆրակտալները շարունակում են ուսումնասիրվել և կիրառվել նոր ոլորտներում՝ տեխնոլոգիաների զարգացման հետ մեկտեղ: Դրանց ունակությունը բարդ կառուցվածքները կոմպակտ և ռեկուրսիվ ձևով ներկայացնելու պատճառով դրանք անհրաժեշտ գործիք են դառնում տարբեր գիտական և արվեստական ոլորտներում: